

Παρουσίαση μουσικολογικής μελέτης,
στο 2^ο διεθνές συνέδριο

του

Αμερικανικού Ιδρύματος Βυζαντινής Μουσικής και
Υμνολογίας

του

Δημητρίου Ανδριώτη

με θέμα:

Βέλτιστος συγκερασμός του οκταχόρδου
με επιστημονική μέθοδο,
για κάθε κλίμακα

Αθήνα 2009

*Εις αιωνίαν μνήμην
τον εθνομάρτυρος Χρυσοστόμου Σμύρνης,
όπου κατακρεουργήθηκε απ' τον μαινόμενο τουρκικό όχλο,
την 27η Αυγούστου 1922*

ΑΙΩΝΙΑ ΤΟΥ Η ΜΝΗΜΗ

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	3
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	5
ΒΕΑΤΙΣΤΟΣ ΣΥΓΚΕΡΑΣΜΟΣ.....	6
ΣΥΓΚΕΡΑΣΜΟΣ ΚΛΙΜΑΚΟΣ	6
Εύρεση κομμάτων.....	6
Επαλήθευση	6
Συγκερασμός 72 κομμάτων.....	7
ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ	7
Συμπεράσματα	9
ΚΛΙΜΑΚΕΣ.....	10
Κατάλογος συγκερασμών	10
Αρχαίας Ελλάδος.....	12
Διάτονον	12
Χρώμα.....	13
Αρμονία	15
Αρμονίας συνέχεια.....	16
Βυζαντινές	17
Διατονικές.....	17
Χρωματικές.....	17
Τετράχορδα με εφέβδομο τόνο	20
Εξωτερικές κλίμακες.....	24
Maqam Karcigar	24
Maqam Humayun.....	24
ΕΠΙΛΟΓΟΣ.....	25
Παρατηρήσεις	25
Συμπεράσματα	25
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	26

Copyright ©
Dimitris Andriotis
2004-2009
Athens

Εισαγωγή

Όπως δείξαμε στην προηγούμενη παρουσίαση, τα κόμματα συγκερασμού της κλίμακος, που προκύπτουν απ' την Πυθαγόρεια κατατομή κανόνος είναι 53.

Εδώ θα προσπαθήσουμε να βρούμε το σφάλμα που υπάρχει, κατά τον συγκερασμό μιας κλίμακας σε ένα **ακέραιο και πεπερασμένο πλήθος κομμάτων**, κάνοντας χρήση ενός μαθηματικού εργαλείου για μοντελοποίηση δεδομένων, τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Αφού υπολογίσουμε το σφάλμα συγκερασμού, θα συγκρίνουμε για διάφορες κλίμακες, μια σειρά από συγκερασμούς, όπου καλούμαστε να βρούμε την καλύτερη προσέγγιση αυτών.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η καλύτερη προσέγγιση της Πυθαγορείου κλίμακος, είναι ο συγκερασμός του Πυθαγόρα στα 53 κόμματα.

* Οι αποδείξεις των ισχυρισμών ή μαθηματικών τύπων, όπου στην εν λόγω παρουσίαση παραλείπονται, γράφονται με έντονη πλάγια γραφή, ενώ παρουσιάζονται όλες σε έτερον υπό έκδοση πόνημα.

Βέλτιστος Συγκερασμός

Συγκερασμός Κλίμακος

Εύρεση κομμάτων

Έστω η πυθαγόρειος κλίμακα, που αποτελείται από 5 Τ και 2 Λ, της μορφής

$$\mathbf{T-T-\Lambda-T-T-\Lambda} \text{ ή}$$

$$\mathbf{T-\Lambda-T-T-T-\Lambda-T} \text{ ή}$$

$$\mathbf{T-T-T-T-T-\Lambda-\Lambda},$$

ο τρόπος δεν έχει καμιά σημασία.

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να χωρίσουμε την κλίμακα σε 53 κόμματα.

Για κάθε διάστημα της κλίμακος, τα αντίστοιχα κόμματα προκύπτουν απ' τον λογαριθμικό τύπο που γνωρίζουμε, $k = \text{round}(N \cdot \log_2 \delta)$.

Με βάση τον τύπο λοιπόν, για τον Τ θα έχουμε:

$$53 \log_2 \frac{9}{8} = 9.006025076442555, \text{ όπου μετά από στρογγυλοποίηση (round), ο Τ}$$

αντιστοιχεί σε 9 κόμματα.

Για το Λ, $53 \log_2 \frac{256}{243} = 3.9849373088936186$, όπου μετά από στρογγυλοποίηση

(round), αντιστοιχεί σε 4 κόμματα.

Επαλήθευση

Προσθέτουμε τα κόμματα που αντιστοιχούν σε κάθε διάστημα της κλίμακος, όπου το άθροισμα πρέπει να ισούται με τα κόμματα συγκερασμού της κλίμακος, δηλαδή: 5 Τ από 9 και 2 Λ από 4, σύνολο 53.

Ο συγκερασμός πραγματοποιείται στην κλίμακα αυτή με πλήθος κομμάτων 53.

Συγκερασμός 72 κομμάτων

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να χωρίσουμε την Πυθαγόρειο κλίμακα σε 72 κόμματα.

Με βάση τον τύπο λοιπόν, για τον Τ θα έχουμε:

$$72 \log_2 \frac{9}{8} = 12.234600103846489, \text{ όπου μετά από στρογγυλοποίηση ο } T \text{ αντιστοιχεί}$$

σε 12 κόμματα.

$$\text{Για το } \Lambda, 72 \log_2 \frac{256}{243} = 5.4134997403837835, \text{ όπου μετά από στρογγυλοποίηση}$$

αντιστοιχεί σε 5 κόμματα.

Κατά την επαλήθευση βρίσκουμε 5 Τ από 12 και 2 Λ από 5, σύνολο 70.

Στην Πυθαγόρειο κλίμακα λοιπόν, δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί ο συγκερασμός των 72 κομμάτων.

Ελάχιστα τετράγωνα

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, είναι μια μαθηματική μέθοδος μοντελοποίησης δεδομένων, η οποία έχει εφαρμογή στον συγκερασμό μας, στην εύρεση του σφάλματος που προκύπτει απ' την στρογγυλοποίηση που κάνουμε.

Για να υπολογίσουμε το σφάλμα αντιστοίχισης-στρογγυλοποίησης του διαστήματος δ, όπου αντιστοιχεί σε k κόμματα στα N, επιλύουμε τη λογαριθμική συνάρτηση $k = N \cdot \log_2 \delta$, ως προς δ και βρίσκουμε:

$$\delta = 2^{\frac{k}{N}} = \sqrt[N]{2^k}$$

Για το διάστημα του Τ (9/8), που αντιστοιχεί σε 9 στα 53 κόμματα, το διάστημα υπολογίζεται σε $2^{\frac{9}{53}} = 1.12491135636339$, μικρότερο απ' τον λόγο του διαστήματος $9/8=1.125$.

Το σφάλμα της αντιστοίχισης-στρογγυλοποίησης είναι του διαστήματος του Τ είναι: $1.125 - 1.12491135636339 = 8.864363661009733\text{E-}5$.

Για το διάστημα του Λ (256/243), που αντιστοιχεί σε 4 στα 53 κόμματα, το διάστημα υπολογίζεται σε $2^{\frac{4}{53}} = 1.053705495203023$, μεγαλύτερο απ' τον λόγο του διαστήματος $256/243=1.0534979423868314$.

Το σφάλμα της αντιστοίχισης-στρογγυλοποίησης είναι του διαστήματος του Λ είναι: $1.0534979423868314 - 1.053705495203023 = -2.0755281619155852\text{E-}4$.

Τέλος, υπολογίζουμε το άθροισμα R των σφαλμάτων για κάθε διάστημα της κλίμακος. Επειδή το σφάλμα μπορεί να είναι αρνητικό ή θετικό, μπορούμε να υψώσουμε το καθένα στο τετράγωνο (ή να πάρουμε την απόλυτο τιμή του):

$$R_N = \sum_i \left(\delta_i - 2^{\frac{k_i}{N}} \right)^2$$

$$R_N' = \sum_i \left| \delta_i - 2^{\frac{k_i}{N}} \right|$$

το οποίο άθροισμα, θα λέμε σφάλμα συγκερασμού.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι τα ίδια, αλλά με διαφορετικούς αριθμούς R, για κάθε τύπο.

Στη συνέχεια γίνεται χρήση του πρώτου τύπου, με το άθροισμα των τετραγώνων, για λόγους τυπικούς, ως προς την μέθοδο μοντελοποίησης.

Για την Πυθαγόρειο κλίμακα που συγκεράσαμε σε 53 κόμματα, υπολογίζουμε :

$$R_{53} = 5(8.86436366E - 5)^2 + 2(-2.07552816E - 4)^2 = 1.25444814E - 7$$

Κάνοντας την ίδια διαδικασία για συγκερασμό στα 12 κόμματα, όπου τα κόμματα για T και Λ είναι 2 και 1 αντίστοιχα, υπολογίζουμε το $R_{12} = 1.0337207002896277E - 4$.

Κάνοντας την ίδια διαδικασία για συγκερασμό στα 99 κόμματα, όπου τα κόμματα για T και Λ είναι 17 και 7 αντίστοιχα, υπολογίζουμε το $R_{99} = 3.111957990960973E - 5$, με $R_{99} > R_{12}$.

Συμπεράσματα

- Μια δεδομένων διαστημάτων κλίμακα, δεν μπορεί πάντα να συγκεραστεί σε δεδομένο ακέραιο αριθμό κομμάτων.
- Όποτε πραγματοποιείται ο συγκερασμός, πάντα θα υπάρχει σφάλμα προσέγγισης, μικρό ή μεγάλο, που λέγεται σφάλμα συγκερασμού.
- Όσο μικρότερο είναι το σφάλμα συγκερασμού, τόσο καλύτερη είναι η προσέγγισή του.
- Μεγαλύτερος αριθμός κομμάτων προς συγκερασμό, δεν οδηγεί απαραίτητα σε καλύτερη προσέγγιση.

Κλίμακες

Κατάλογος συγκερασμών

Επιχειρούμε εδώ να συγκεράσουμε γνωστές κλίμακες, απ' την αρχαιότητα έως σήμερα, με διάφορες μονάδες συγκερασμού, που έχουν κατά καιρούς εμφανιστεί. Απ' τον ευρωπαϊκό συγκερασμό σε 12 κόμματα, μέχρι τον τελευταίο χρονικά που μπορέσαμε να βρούμε, αυτόν του Τούρκου κανονιέρη Ozan Yarman, σε 79 κόμματα.

Σε κάθε κλίμακα, υπολογίζουμε το σφάλμα συγκερασμού R, ταξινομώντας τες, με βάση αυτό, κατ' αύξουσα σειρά.

Οι αριθμοί όπου θα γίνουν οι συγκερασμοί, είναι οι παρακάτω:

α/α	Όνομα	Κόμματα	Σύμβολο
1	Ευρωπαϊκό ημιτόνιο, Bach	12	H
2	Επιτροπή 1881, αρχικό	36	Ep1
3	Κόμμα Τουρκικής Μουσικής, του Rauf Yekta Bey	53	TM
4	Συγκερασμός Χρυσάνθου, Αραβική μονάδα,	68	Cris
5	Επιτροπή 1881, τελικό	72	BM
6	Savart	301	Savart
7	Delfi	665	Delfi
8	Διεθνής μονάδα ευρωπαϊκής μουσικολογίας	1200	Cents
9	Ινδική μονάδα	10600	Santi
10	Ozan Yarman	79	Ozan
11	Συγκερασμός σε 71	71	/71
12	Συγκερασμός σε 64	64	/64

Παράδειγμα συγκερασμού της Πυθαγορείου κλίμακος:

Κλίμακα της μορφής $4\chi-T-4\chi$, με :

$4\chi = [256/243 - 9/8 - 9/8]$: Πυθαγόρα

$d1 = 256/243$ [90 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.0534979423868314}

$d2 = 9/8$ [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

$d3 = 9/8$ [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

1. Syg : R(665)=	3.4821497128602734E-13	(0) k=[50, 113, 113, 113, 50, 113, 113]
2. Syg : ** R(10600)=	1.1388075272268717E-9	(-1) k=[797, 1801, 1801, 1801, 797, 1801, 1801]
3. Syg : R(1200)=	5.4589036369206334E-8	(0) k=[90, 204, 204, 204, 90, 204, 204]
4. Syg : R(53)=	1.254448145754087E-7	(0) k=[4, 9, 9, 9, 4, 9, 9]
5. Syg : R(301)=	2.329432692198764E-6	(0) k=[23, 51, 51, 51, 23, 51, 51]
6. Syg : ** R(64)=	2.0797860598463597E-5	(+1) k=[5, 11, 11, 11, 5, 11, 11]
7. Syg : ** R(71)=	2.66554187931938E-5	(-1) k=[5, 12, 12, 12, 5, 12, 12]
8. Syg : ** R(72)=	6.724126913234864E-5	(-2) k=[5, 12, 12, 12, 5, 12, 12]
9. Syg : ** R(79)=	8.790481955554052E-5	(-2) k=[6, 13, 13, 13, 6, 13, 13]
10. Syg : R(12)=	1.0337207002896278E-4	(0) k=[1, 2, 2, 2, 1, 2, 2]
11. Syg : R(36)=	1.0337207002896278E-4	(0) k=[3, 6, 6, 6, 3, 6, 6]
12. Syg : ** R(68)=	1.3378481763777158E-4	(+2) k=[5, 12, 12, 12, 5, 12, 12]

Εδώ βλέπουμε ότι στην Πυθαγόρειο κλίμακα, δεν γίνεται συγκερασμός σε όσα έχουν **. Μετά το R, μέσα στην παρένθεση, βλέπουμε το σφάλμα του αριθμού των κομμάτων μετά τον συγκερασμό. Για 72 λόγου χάρη, είναι -2, που σημαίνει ότι είναι 2 λιγότερα απ' ότι έπρεπε να είναι. Ο συγκερασμός δηλαδή, γίνεται για 70 κόμματα κι όχι για 72.

Επειδή αυτές οι περιπτώσεις δεν μας ενδιαφέρουν, θα τις παραλείπουμε.

Έτσι, ο συγκερασμός της πυθαγορείου θα φαίνεται ως εξής:

Κλίμακα της μορφής $4\chi-T-4\chi$, με :

$4\chi = [256/243 - 9/8 - 9/8]$: Πυθαγόρα

$d1 = 256/243$ [90 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.0534979423868314}

$d2 = 9/8$ [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

$d3 = 9/8$ [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

1. Syg : R(665)=	3.4821497128602734E-13	k=[50, 113, 113, 113, 50, 113, 113]
3. Syg : R(1200)=	5.4589036369206334E-8	k=[90, 204, 204, 204, 90, 204, 204]
4. Syg : R(53)=	1.254448145754087E-7	k=[4, 9, 9, 9, 4, 9, 9]
5. Syg : R(301)=	2.329432692198764E-6	k=[23, 51, 51, 51, 23, 51, 51]
10. Syg : R(12)=	1.0337207002896278E-4	k=[1, 2, 2, 2, 1, 2, 2]
11. Syg : R(36)=	1.0337207002896278E-4	k=[3, 6, 6, 6, 3, 6, 6]

Ο πίνακας k, περιέχει τα διαστήματα της κλίμακος σε κόμματα συγκερασμού.

Το διάστημα του λήμματος για παράδειγμα, αντιστοιχεί σε 50 delfi, σε 90 cents, σε 4 Πυθαγόρεια κόμματα, σε 301 savart, σε 1 Ευρωπαϊκό ημιτόνιο.

Αρχαίας Ελλάδος

Διάτονον

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [256/243 - 9/8 - 9/8] : Πυθαγόρα

d1 = 256/243 [90 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.0534979423868314}

d2 = 9/8 [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

d3 = 9/8 [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

1. Syg : R(665)=	3.4821497128602734E-13	k=[50, 113, 113, 113, 50, 113, 113]
3. Syg : R(1200)=	5.4589036369206334E-8	k=[90, 204, 204, 204, 90, 204, 204]
4. Syg : R(53)=	1.254448145754087E-7	k=[4, 9, 9, 9, 4, 9, 9]
5. Syg : R(301)=	2.329432692198764E-6	k=[23, 51, 51, 51, 23, 51, 51]
10. Syg : R(12)=	1.0337207002896278E-4	k=[1, 2, 2, 2, 1, 2, 2]
11. Syg : R(36)=	1.0337207002896278E-4	k=[3, 6, 6, 6, 3, 6, 6]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [16/15 - 10/9 - 9/8] : Διδύμου

d1 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

d2 = 10/9 [182 Cents, 8 TM, 11 BM, 10 Cris] {1.111111111111112}

d3 = 9/8 [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

2. Syg : R(665)=	3.478620169911415E-8	k=[62, 101, 113, 113, 62, 101, 113]
3. Syg : R(1200)=	1.9933046710022554E-7	k=[112, 182, 204, 204, 112, 182, 204]
4. Syg : R(301)=	1.245311768383878E-6	k=[28, 46, 51, 51, 28, 46, 51]
5. Syg : R(53)=	3.010813004956144E-6	k=[5, 8, 9, 9, 5, 8, 9]
7. Syg : R(72)=	3.858215411814804E-5	k=[7, 11, 12, 12, 7, 11, 12]
10. Syg : R(68)=	1.3330051974333934E-4	k=[6, 10, 12, 12, 6, 10, 12]
12. Syg : R(12)=	3.807940548846931E-4	k=[1, 2, 2, 2, 1, 2, 2]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [12/11 - 11/10 - 10/9] : Διατονικόν Ίσον Πτολεμαίου

d1 = 12/11 [151 Cents, 7 TM, 9 BM, 9 Cris] {1.0909090909090908}

d2 = 11/10 [165 Cents, 7 TM, 10 BM, 9 Cris] {1.1}

d3 = 10/9 [182 Cents, 8 TM, 11 BM, 10 Cris] {1.111111111111112}

2. Syg : R(1200)=	2.4230385249008584E-7	k=[151, 165, 182, 204, 151, 165, 182]
4. Syg : R(301)=	3.466212326036255E-6	k=[38, 41, 46, 51, 38, 41, 46]
5. Syg : R(72)=	9.709334696623867E-6	k=[9, 10, 11, 12, 9, 10, 11]
6. Syg : R(79)=	2.224726858511901E-5	k=[10, 11, 12, 13, 10, 11, 12]
9. Syg : R(53)=	8.467107634575988E-5	k=[7, 7, 8, 9, 7, 7, 8]
10. Syg : R(68)=	1.392809971602406E-4	k=[9, 9, 10, 12, 9, 9, 10]
11. Syg : R(36)=	4.168051737704058E-4	k=[5, 5, 5, 6, 5, 5, 5]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [16/15 - 9/8 - 10/9] : Διατονικόν σύντονον

d1 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

d2 = 9/8 [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

d3 = 10/9 [182 Cents, 8 TM, 11 BM, 10 Cris] {1.111111111111112}

2. Syg : R(665)=	3.478620169911415E-8	k=[62, 113, 101, 113, 62, 113, 101]
3. Syg : R(1200)=	1.9933046710022552E-7	k=[112, 204, 182, 204, 112, 204, 182]
4. Syg : R(301)=	1.2453117683838782E-6	k=[28, 51, 46, 51, 28, 51, 46]
5. Syg : R(53)=	3.010813004956144E-6	k=[5, 9, 8, 9, 5, 9, 8]
7. Syg : R(72)=	3.858215411814804E-5	k=[7, 12, 11, 12, 7, 12, 11]
10. Syg : R(68)=	1.3330051974333934E-4	k=[6, 12, 10, 12, 6, 12, 10]
12. Syg : R(12)=	3.807940548846931E-4	k=[1, 2, 2, 2, 1, 2, 2]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [21/20 - 10/9 - 8/7] : Διατονικόν μαλακόν (με επέβδομον)

d1 = 21/20 [84 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.05}

d2 = 10/9 [182 Cents, 8 TM, 11 BM, 10 Cris] {1.111111111111112}

d3 = 8/7 [231 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1428571428571428}

2. Syg : R(665)=	1.3926255857482576E-7	k=[47, 101, 128, 113, 47, 101, 128]
4. Syg : R(301)=	1.357744040066763E-6	k=[21, 46, 58, 51, 21, 46, 58]
5. Syg : R(72)=	1.2167349151976923E-5	k=[5, 11, 14, 12, 5, 11, 14]
7. Syg : R(53)=	4.848564706846368E-5	k=[4, 8, 10, 9, 4, 8, 10]
8. Syg : R(79)=	5.996981043936047E-5	k=[6, 12, 15, 13, 6, 12, 15]
9. Syg : R(68)=	6.824494472150626E-5	k=[5, 10, 13, 12, 5, 10, 13]
11. Syg : R(36)=	3.917886426739505E-4	k=[3, 5, 7, 6, 3, 5, 7]
12. Syg : R(12)=	0.0012751488222725144	k=[1, 2, 2, 2, 1, 2, 2]

Xρώμα

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [28/27 - 243/224 - 32/27] : Αρχύτα

d1 = 28/27 [63 Cents, 3 TM, 4 BM, 4 Cris] {1.037037037037037}

d2 = 243/224 [141 Cents, 6 TM, 8 BM, 8 Cris] {1.0848214285714286}

d3 = 32/27 [294 Cents, 13 TM, 18 BM, 17 Cris] {1.1851851851851851}

2. Syg : R(1200)=	2.3632978202799927E-8	k=[63, 141, 294, 204, 63, 141, 294]
3. Syg : R(665)=	5.839234732635273E-8	k=[35, 78, 163, 113, 35, 78, 163]
4. Syg : R(301)=	2.9344613315917017E-6	k=[16, 35, 74, 51, 16, 35, 74]
5. Syg : R(53)=	3.81446873336132E-5	k=[3, 6, 13, 9, 3, 6, 13]
8. Syg : R(36)=	9.401666275612608E-5	k=[2, 4, 9, 6, 2, 4, 9]
9. Syg : R(72)=	9.401666275612608E-5	k=[4, 8, 18, 12, 4, 8, 18]
12. Syg : R(12)=	0.002330739359769258	k=[1, 1, 3, 2, 1, 1, 3]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [20/19 - 19/18 - 6/5] : Ερατοσθένη

d1 = 20/19 [89 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.0526315789473684}

d2 = 19/18 [94 Cents, 4 TM, 6 BM, 5 Cris] {1.0555555555555556}

d3 = 6/5 [316 Cents, 14 TM, 19 BM, 18 Cris] {1.2}

2. Syg : R(665)=	1.6752322895897742E-7	k=[49, 52, 175, 113, 49, 52, 175]
5. Syg : R(53)=	1.0886236104199855E-5	k=[4, 4, 14, 9, 4, 4, 14]
7. Syg : R(79)=	3.6792059018751986E-5	k=[6, 6, 21, 13, 6, 6, 21]
8. Syg : R(68)=	5.163357165769868E-5	k=[5, 5, 18, 12, 5, 5, 18]
9. Syg : R(72)=	6.002192589392656E-5	k=[5, 6, 19, 12, 5, 6, 19]
11. Syg : R(12)=	3.6329085656518776E-4	k=[1, 1, 3, 2, 1, 1, 3]
12. Syg : R(36)=	3.6329085656518776E-4	k=[3, 3, 9, 6, 3, 3, 9]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [16/15 - 25/24 - 6/5] : Διδύμου

d1 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

d2 = 25/24 [71 Cents, 3 TM, 4 BM, 4 Cris] {1.0416666666666667}

d3 = 6/5 [316 Cents, 14 TM, 19 BM, 18 Cris] {1.2}

2. Syg : R(665)=	1.0146498889263565E-7	k=[62, 39, 175, 113, 62, 39, 175]
4. Syg : R(301)=	1.4709540036562302E-6	k=[28, 18, 79, 51, 28, 18, 79]
5. Syg : R(53)=	8.848931728246755E-6	k=[5, 3, 14, 9, 5, 3, 14]
7. Syg : R(72)=	3.7589870109190416E-5	k=[7, 4, 19, 12, 7, 4, 19]
8. Syg : R(68)=	5.5932532730439534E-5	k=[6, 4, 18, 12, 6, 4, 18]
10. Syg : R(79)=	7.054823875377076E-5	k=[7, 5, 21, 13, 7, 5, 21]
12. Syg : R(12)=	9.766225171259021E-4	k=[1, 1, 3, 2, 1, 1, 3]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [22/21 - 12/11 - 7/6] : Σύντονον χρωματικόν (Πτολεμαίου ?)

d1 = 22/21 [81 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.0476190476190477}

d2 = 12/11 [151 Cents, 7 TM, 9 BM, 9 Cris] {1.0909090909090908}

d3 = 7/6 [267 Cents, 12 TM, 16 BM, 15 Cris] {1.1666666666666667}

3. Syg : R(665)=	9.507464985817751E-7	k=[45, 83, 148, 113, 45, 83, 148]
4. Syg : R(301)=	1.2542369396594952E-6	k=[20, 38, 67, 51, 20, 38, 67]
5. Syg : R(72)=	1.2537055000581065E-5	k=[5, 9, 16, 12, 5, 9, 16]
8. Syg : R(79)=	7.317158974569287E-5	k=[5, 10, 18, 13, 5, 10, 18]
11. Syg : R(36)=	3.522041301825971E-4	k=[2, 5, 8, 6, 2, 5, 8]

Αρμονία

Κλίμακα της μορφής $4\chi\text{-}T\text{-}4\chi$, με :

$4\chi = [28/27 - 36/35 - 5/4]$: Αρχύτα ή Πυθαγόρα

d1 = 28/27 [63 Cents, 3 TM, 4 BM, 4 Cris] {1.037037037037037}

d2 = 36/35 [49 Cents, 2 TM, 3 BM, 3 Cris] {1.0285714285714285}

d3 = 5/4 [386 Cents, 17 TM, 23 BM, 22 Cris] {1.25}

2. Syg : R(665)=	5.244638350131985E-8	k=[35, 27, 214, 113, 35, 27, 214]
3. Syg : R(1200)=	1.4433972450703012E-7	k=[63, 49, 386, 204, 63, 49, 386]
4. Syg : R(301)=	1.410888798853245E-6	k=[16, 12, 97, 51, 16, 12, 97]
6. Syg : R(72)=	2.6631191360292253E-5	k=[4, 3, 23, 12, 4, 3, 23]
7. Syg : R(53)=	2.8373585147153565E-5	k=[3, 2, 17, 9, 3, 2, 17]
11. Syg : R(36)=	3.7991437333263897E-4	k=[2, 1, 12, 6, 2, 1, 12]
12. Syg : R(12)=	2.117127519101798	k=[1, 0, 4, 2, 1, 0, 4]

Κλίμακα της μορφής $4\chi\text{-}T\text{-}4\chi$, με :

$4\chi = [40/39 - 39/38 - 19/15]$: Ερατοσθένη

d1 = 40/39 [44 Cents, 2 TM, 3 BM, 2 Cris] {1.0256410256410255}

d2 = 39/38 [45 Cents, 2 TM, 3 BM, 3 Cris] {1.0263157894736843}

d3 = 19/15 [409 Cents, 18 TM, 25 BM, 23 Cris] {1.2666666666666666}

2. Syg : R(1200)=	8.799651835801993E-8	k=[44, 45, 409, 204, 44, 45, 409]
3. Syg : R(665)=	3.606255461270679E-7	k=[24, 25, 227, 113, 24, 25, 227]
4. Syg : R(301)=	3.0818513842653016E-6	k=[11, 11, 103, 51, 11, 11, 103]
5. Syg : R(53)=	4.638697648602112E-6	k=[2, 2, 18, 9, 2, 2, 18]
6. Syg : R(79)=	2.0667902361098227E-5	k=[3, 3, 27, 13, 3, 3, 27]
10. Syg : R(68)=	1.340261201811884E-4	k=[2, 3, 23, 12, 2, 3, 23]

Κλίμακα της μορφής $4\chi\text{-}T\text{-}4\chi$, με :

$4\chi = [32/31 - 31/30 - 5/4]$: Διδύμου

d1 = 32/31 [55 Cents, 2 TM, 3 BM, 3 Cris] {1.032258064516129}

d2 = 31/30 [57 Cents, 3 TM, 3 BM, 3 Cris] {1.0333333333333334}

d3 = 5/4 [386 Cents, 17 TM, 23 BM, 22 Cris] {1.25}

2. Syg : R(1200)=	1.4565012838789633E-7	k=[55, 57, 386, 204, 55, 57, 386]
4. Syg : R(301)=	1.4704374873515357E-6	k=[14, 14, 97, 51, 14, 14, 97]
5. Syg : R(68)=	4.333811668450771E-5	k=[3, 3, 22, 12, 3, 3, 22]
9. Syg : R(79)=	9.759355234969288E-5	k=[4, 4, 25, 13, 4, 4, 25]
10. Syg : R(53)=	1.5762605863027388E-4	k=[2, 3, 17, 9, 2, 3, 17]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [46/45 - 24/23 - 5/4] : Πτολεμαίου

d1 = 46/45 [38 Cents, 2 TM, 2 BM, 2 Cris] {1.0222222222222221}

d2 = 24/23 [74 Cents, 3 TM, 4 BM, 4 Cris] {1.0434782608695652}

d3 = 5/4 [386 Cents, 17 TM, 23 BM, 22 Cris] {1.25}

2. Syg : R(665)=	1.0716993509081494E-7	k=[21, 41, 214, 113, 21, 41, 214]
3. Syg : R(1200)=	1.819153195181095E-7	k=[38, 74, 386, 204, 38, 74, 386]
4. Syg : R(301)=	5.288668125875478E-6	k=[10, 18, 97, 51, 10, 18, 97]
5. Syg : R(68)=	4.225120718471553E-5	k=[2, 4, 22, 12, 2, 4, 22]
8. Syg : R(53)=	6.269313977284863E-5	k=[2, 3, 17, 9, 2, 3, 17]
10. Syg : R(79)=	1.0558737476453533E-4	k=[3, 5, 25, 13, 3, 5, 25]
11. Syg : R(36)=	2.5437052886761443E-4	k=[1, 2, 12, 6, 1, 2, 12]
12. Syg : R(12)=	2.0905908686740817	k=[0, 1, 4, 2, 0, 1, 4]

Αρμονίας συνέχεια

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [31/30 - 5/4 - 32/31] : Μαλακό εναρμόνιο 5/4 με φυσική διαίρεση

d1 = 31/30 [57 Cents, 3 TM, 3 BM, 3 Cris] {1.03333333333334}

d2 = 5/4 [386 Cents, 17 TM, 23 BM, 22 Cris] {1.25}

d3 = 32/31 [55 Cents, 2 TM, 3 BM, 3 Cris] {1.032258064516129}

2. Syg : R(1200)=	1.4565012838789633E-7	k=[57, 386, 55, 204, 57, 386, 55]
4. Syg : R(301)=	1.4704374873515357E-6	k=[14, 97, 14, 51, 14, 97, 14]
5. Syg : R(68)=	4.333811668450771E-5	k=[3, 22, 3, 12, 3, 22, 3]
9. Syg : R(79)=	9.759355234969288E-5	k=[4, 25, 4, 13, 4, 25, 4]
10. Syg : R(53)=	1.5762605863027388E-4	k=[3, 17, 2, 9, 3, 17, 2]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [-/- 81/64 - -/-] : σκληρό εναρμόνιο 81/64 (2T) με διαίρεση

d1 = -/- [45 Cents, 2 TM, 3 BM, 3 Cris] {1.026400478559346}

d2 = 81/64 [408 Cents, 18 TM, 24 BM, 23 Cris] {1.265625}

d3 = -/- [45 Cents, 2 TM, 3 BM, 3 Cris] {1.026400478559346}

1. Syg : R(665)=	3.5619726799530096E-13	k=[25, 226, 25, 113, 25, 226, 25]
3. Syg : R(1200)=	5.584712029755097E-8	k=[45, 408, 45, 204, 45, 408, 45]
4. Syg : R(53)=	1.2829716114414635E-7	k=[2, 18, 2, 9, 2, 18, 2]
6. Syg : R(79)=	2.3445312554090492E-5	k=[3, 27, 3, 13, 3, 27, 3]
8. Syg : R(72)=	1.0519209230340206E-4	k=[3, 24, 3, 12, 3, 24, 3]

Bυζαντινές

Διατονικές

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [9/8 - 12/11 - 88/81] : Χρύσανθου

d1 = 9/8 [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

d2 = 12/11 [151 Cents, 7 TM, 9 BM, 9 Cris] {1.0909090909090909}

d3 = 88/81 [143 Cents, 6 TM, 9 BM, 8 Cris] {1.0864197530864197}

2. Syg : R(1200)=	3.101197268194766E-7	k=[204, 151, 143, 204, 204, 151, 143]
3. Syg : R(301)=	1.0227519737649567E-6	k=[51, 38, 36, 51, 51, 38, 36]
4. Syg : R(665)=	1.1774705851156641E-6	k=[113, 83, 80, 113, 113, 83, 80]
6. Syg : R(72)=	5.306892730564769E-5	k=[12, 9, 9, 12, 12, 9, 9]
9. Syg : R(53)=	9.510345805176294E-5	k=[9, 7, 6, 9, 9, 7, 6]
11. Syg : R(36)=	3.0617497247728255E-4	k=[6, 5, 4, 6, 6, 5, 4]
12. Syg : R(12)=	0.0034638247372212163	k=[2, 2, 1, 2, 2, 2, 1]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [9/8 - 800/729 - 27/25] : Επιτροπής 1881

d1 = 9/8 [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

d2 = 800/729 [161 Cents, 7 TM, 10 BM, 9 Cris] {1.0973936899862826}

d3 = 27/25 [133 Cents, 6 TM, 8 BM, 8 Cris] {1.08}

2. Syg : R(1200)=	6.26420830125682E-8	k=[204, 161, 133, 204, 204, 161, 133]
3. Syg : R(665)=	1.3868409229615018E-7	k=[113, 89, 74, 113, 113, 89, 74]
5. Syg : R(53)=	9.988488335062646E-6	k=[9, 7, 6, 9, 9, 7, 6]
6. Syg : R(36)=	4.616741714506428E-5	k=[6, 5, 4, 6, 6, 5, 4]
7. Syg : R(72)=	4.616741714506428E-5	k=[12, 10, 8, 12, 12, 10, 8]
10. Syg : R(79)=	9.268213054864597E-5	k=[13, 11, 9, 13, 13, 11, 9]
12. Syg : R(12)=	0.0021196977609720027	k=[2, 2, 1, 2, 2, 2, 1]

Χρωματικές

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [15/14 - 7/6 - 16/15] : μαλακό χρωματικό 7/6 με φυσική διαίρεση (MX)

d1 = 15/14 [119 Cents, 5 TM, 7 BM, 7 Cris] {1.0714285714285714}

d2 = 7/6 [267 Cents, 12 TM, 16 BM, 15 Cris] {1.1666666666666667}

d3 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

2. Syg : R(665)=	1.4308527094519132E-7	k=[66, 148, 62, 113, 66, 148, 62]
3. Syg : R(1200)=	2.2355293202267683E-7	k=[119, 267, 112, 204, 119, 267, 112]
4. Syg : R(301)=	2.2495620492396934E-7	k=[30, 67, 28, 51, 30, 67, 28]
5. Syg : R(72)=	3.0919606928816625E-5	k=[7, 16, 7, 12, 7, 16, 7]
7. Syg : R(53)=	5.256229908987628E-5	k=[5, 12, 5, 9, 5, 12, 5]
9. Syg : R(68)=	6.913225119128011E-5	k=[7, 15, 6, 12, 7, 15, 6]
10. Syg : R(79)=	8.192755534011668E-5	k=[8, 18, 7, 13, 8, 18, 7]
11. Syg : R(36)=	2.5925609276518293E-4	k=[4, 8, 3, 6, 4, 8, 3]
12. Syg : R(12)=	0.0014127130121304196	k=[1, 3, 1, 2, 1, 3, 1]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [135/128 - 6/5 - 256/243] : σκληρό χρωματικό 6/5 MX & Χρυσάνθου (?)
d1 = 135/128 [92 Cents, 4 TM, 6 BM, 5 Cris] {1.0546875}
d2 = 6/5 [316 Cents, 14 TM, 19 BM, 18 Cris] {1.2}
d3 = 256/243 [90 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.0534979423868314}

2. Syg : R(665)=	3.750151443928449E-8	k=[51, 175, 50, 113, 51, 175, 50]
3. Syg : R(1200)=	1.882829864665411E-7	k=[92, 316, 90, 204, 92, 316, 90]
4. Syg : R(301)=	2.3790360210432746E-6	k=[23, 79, 23, 51, 23, 79, 23]
5. Syg : R(53)=	3.7490204254451847E-6	k=[4, 14, 4, 9, 4, 14, 4]
7. Syg : R(79)=	2.965720508924779E-5	k=[6, 21, 6, 13, 6, 21, 6]
8. Syg : R(68)=	4.448676073986262E-5	k=[5, 18, 5, 12, 5, 18, 5]
9. Syg : R(72)=	8.809997547746151E-5	k=[6, 19, 5, 12, 6, 19, 5]
11. Syg : R(12)=	3.561926109911809E-4	k=[1, 3, 1, 2, 1, 3, 1]
12. Syg : R(36)=	3.561926109911809E-4	k=[3, 9, 3, 6, 3, 9, 3]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [19/18 - 6/5 - 20/19] : σκληρό χρωματικό 6/5 με φυσική διαίρεση
d1 = 19/18 [94 Cents, 4 TM, 6 BM, 5 Cris] {1.0555555555555556}
d2 = 6/5 [316 Cents, 14 TM, 19 BM, 18 Cris] {1.2}
d3 = 20/19 [89 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.0526315789473684}

2. Syg : R(665)=	1.6752322895897742E-7	k=[52, 175, 49, 113, 52, 175, 49]
5. Syg : R(53)=	1.0886236104199855E-5	k=[4, 14, 4, 9, 4, 14, 4]
7. Syg : R(79)=	3.6792059018751986E-5	k=[6, 21, 6, 13, 6, 21, 6]
8. Syg : R(68)=	5.163357165769868E-5	k=[5, 18, 5, 12, 5, 18, 5]
9. Syg : R(72)=	6.002192589392656E-5	k=[6, 19, 5, 12, 6, 19, 5]
11. Syg : R(12)=	3.6329085656518776E-4	k=[1, 3, 1, 2, 1, 3, 1]
12. Syg : R(36)=	3.6329085656518776E-4	k=[3, 9, 3, 6, 3, 9, 3]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [27/25 - 2500/2187 - 27/25] : μαλακό χρωματικό επιτροπής
d1 = 27/25 [133 Cents, 6 TM, 8 BM, 8 Cris] {1.08}
d2 = 2500/2187 [232 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1431184270690444}
d3 = 27/25 [133 Cents, 6 TM, 8 BM, 8 Cris] {1.08}

2. Syg : R(1200)=	2.526496112920313E-7	k=[133, 232, 133, 204, 133, 232, 133]
3. Syg : R(665)=	4.425598777940591E-7	k=[74, 128, 74, 113, 74, 128, 74]
5. Syg : R(36)=	9.169951641662577E-6	k=[4, 7, 4, 6, 4, 7, 4]
6. Syg : R(72)=	9.169951641662577E-6	k=[8, 14, 8, 12, 8, 14, 8]
8. Syg : R(53)=	3.374075349761529E-5	k=[6, 10, 6, 9, 6, 10, 6]
10. Syg : R(79)=	4.830438519776869E-5	k=[9, 15, 9, 13, 9, 15, 9]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [256/243 - 243/200 - 25/24] : σκληρό χρωματικό επιτροπής

d1 = 256/243 [90 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.0534979423868314}

d2 = 243/200 [337 Cents, 15 TM, 20 BM, 19 Cris] {1.215}

d3 = 25/24 [71 Cents, 3 TM, 4 BM, 4 Cris] {1.0416666666666667}

2. Syg : R(1200)=	1.4006886145215567E-7	k=[90, 337, 71, 204, 90, 337, 71]
3. Syg : R(665)=	1.4998007519656048E-7	k=[50, 187, 39, 113, 50, 187, 39]
5. Syg : R(53)=	1.159587448729082E-5	k=[4, 15, 3, 9, 4, 15, 3]
8. Syg : R(68)=	3.248541981565175E-5	k=[5, 19, 4, 12, 5, 19, 4]
9. Syg : R(79)=	4.697682455484746E-5	k=[6, 22, 5, 13, 6, 22, 5]
11. Syg : R(36)=	1.0349865308479167E-4	k=[3, 10, 2, 6, 3, 10, 2]
12. Syg : R(12)=	0.002041578785096777	k=[1, 3, 1, 2, 1, 3, 1]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [16/15 - 75/64 - 16/15] : μαλακό χρωματικό (Δεβρελής, Ευθυμιάδης)

d1 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

d2 = 75/64 [275 Cents, 12 TM, 16 BM, 16 Cris] {1.171875}

d3 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

2. Syg : R(665)=	1.1411446512234213E-7	k=[62, 152, 62, 113, 62, 152, 62]
4. Syg : R(301)=	3.9178814043472226E-7	k=[28, 69, 28, 51, 28, 69, 28]
5. Syg : R(53)=	1.0930977889226523E-5	k=[5, 12, 5, 9, 5, 12, 5]
9. Syg : R(72)=	1.0069224847734267E-4	k=[7, 16, 7, 12, 7, 16, 7]
10. Syg : R(68)=	1.335244290712415E-4	k=[6, 16, 6, 12, 6, 16, 6]
12. Syg : R(12)=	8.148114356691601E-4	k=[1, 3, 1, 2, 1, 3, 1]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [16/15 - 1215/1024 - 256/243] : σκληρό χρωματικό (Δεβρελής)

d1 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

d2 = 1215/1024 [296 Cents, 13 TM, 18 BM, 17 Cris] {1.1865234375}

d3 = 256/243 [90 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.0534979423868314}

2. Syg : R(665)=	3.754316511697104E-8	k=[62, 164, 50, 113, 62, 164, 50]
3. Syg : R(1200)=	1.0313211946840028E-7	k=[112, 296, 90, 204, 112, 296, 90]
4. Syg : R(301)=	2.833403100217201E-6	k=[28, 74, 23, 51, 28, 74, 23]
5. Syg : R(53)=	4.621235803754931E-6	k=[5, 13, 4, 9, 5, 13, 4]
7. Syg : R(68)=	6.938994495016871E-5	k=[6, 17, 5, 12, 6, 17, 5]
8. Syg : R(72)=	7.442695586671E-5	k=[7, 18, 5, 12, 7, 18, 5]
11. Syg : R(12)=	1.9579443274541383E-4	k=[1, 3, 1, 2, 1, 3, 1]
12. Syg : R(36)=	1.9579443274541383E-4	k=[3, 9, 3, 6, 3, 9, 3]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [16/15 - 32/27 - 135/128] : σκληρό χρωματικό (Ευθυμιάδης)

d1 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

d2 = 32/27 [294 Cents, 13 TM, 18 BM, 17 Cris] {1.1851851851851851}

d3 = 135/128 [92 Cents, 4 TM, 6 BM, 5 Cris] {1.0546875}

2. Syg : R(665)=	3.3123629533246194E-8	k=[62, 163, 51, 113, 62, 163, 51]
3. Syg : R(1200)=	9.903781636401671E-8	k=[112, 294, 92, 204, 112, 294, 92]
4. Syg : R(301)=	1.0569321495891794E-6	k=[28, 74, 23, 51, 28, 74, 23]
5. Syg : R(53)=	3.6318249390882105E-6	k=[5, 13, 4, 9, 5, 13, 4]
8. Syg : R(68)=	9.592549756158158E-5	k=[6, 17, 5, 12, 6, 17, 5]
11. Syg : R(12)=	1.881885486424461E-4	k=[1, 3, 1, 2, 1, 3, 1]
12. Syg : R(36)=	1.881885486424461E-4	k=[3, 9, 3, 6, 3, 9, 3]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [27/25 - 125/108 - 16/15] : μαλακό χρωματικό (μαλακότερο) mix

d1 = 27/25 [133 Cents, 6 TM, 8 BM, 8 Cris] {1.08}

d2 = 125/108 [253 Cents, 11 TM, 15 BM, 14 Cris] {1.1574074074074074}

d3 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

2. Syg : R(1200)=	1.0735788338509571E-7	k=[133, 253, 112, 204, 133, 253, 112]
3. Syg : R(665)=	2.6167097416176304E-7	k=[74, 140, 62, 113, 74, 140, 62]
5. Syg : R(53)=	2.1389051564302817E-5	k=[6, 11, 5, 9, 6, 11, 5]
6. Syg : R(72)=	3.3438239013814594E-5	k=[8, 15, 7, 12, 8, 15, 7]
8. Syg : R(79)=	7.273780802142239E-5	k=[9, 17, 7, 13, 9, 17, 7]
10. Syg : R(68)=	1.335922422204394E-4	k=[8, 14, 6, 12, 8, 14, 6]
11. Syg : R(36)=	2.7663959107197594E-4	k=[4, 8, 3, 6, 4, 8, 3]
12. Syg : R(12)=	0.002976195899643226	k=[1, 3, 1, 2, 1, 3, 1]

Τετράχορδα με εφέβδομο τόνο

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [8/7 - 12/11 - 77/72] : 1ο με Εφέβδομο

d1 = 8/7 [231 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1428571428571428}

d2 = 12/11 [151 Cents, 7 TM, 9 BM, 9 Cris] {1.0909090909090908}

d3 = 77/72 [116 Cents, 5 TM, 7 BM, 7 Cris] {1.0694444444444444}

2. Syg : R(1200)=	1.761939235841473E-7	k=[231, 151, 116, 204, 231, 151, 116]
3. Syg : R(301)=	1.0258573135910037E-6	k=[58, 38, 29, 51, 58, 38, 29]
5. Syg : R(72)=	1.0974990125114935E-5	k=[14, 9, 7, 12, 14, 9, 7]
8. Syg : R(79)=	4.972841185761326E-5	k=[15, 10, 8, 13, 15, 10, 8]
9. Syg : R(53)=	7.58738091617704E-5	k=[10, 7, 5, 9, 10, 7, 5]
11. Syg : R(36)=	4.157163203393513E-4	k=[7, 5, 3, 6, 7, 5, 3]
12. Syg : R(12)=	0.0030287939024615505	k=[2, 2, 1, 2, 2, 2, 1]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [8/7 - 35/32 - 16/15] : 20 με Εφέβδομο

d1 = 8/7 [231 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1428571428571428}

d2 = 35/32 [155 Cents, 7 TM, 9 BM, 9 Cris] {1.09375}

d3 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

2. Syg : R(665)=	5.2291891197083184E-8	k=[128, 86, 62, 113, 128, 86, 62]
3. Syg : R(1200)=	1.002251040080955E-7	k=[231, 155, 112, 204, 231, 155, 112]
4. Syg : R(301)=	2.5003175981430836E-7	k=[58, 39, 28, 51, 58, 39, 28]
5. Syg : R(53)=	3.0330226262142536E-5	k=[10, 7, 5, 9, 10, 7, 5]
6. Syg : R(72)=	5.0080633200816956E-5	k=[14, 9, 7, 12, 14, 9, 7]
9. Syg : R(68)=	6.561791965387483E-5	k=[13, 9, 6, 12, 13, 9, 6]
11. Syg : R(36)=	2.2107123383118E-4	k=[7, 5, 3, 6, 7, 5, 3]
12. Syg : R(12)=	0.0025909073062234875	k=[2, 2, 1, 2, 2, 2, 1]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [8/7 - 49/45 - 15/14] : 30 με Εφέβδομο

d1 = 8/7 [231 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1428571428571428}

d2 = 49/45 [147 Cents, 7 TM, 9 BM, 8 Cris] {1.0888888888888888}

d3 = 15/14 [119 Cents, 5 TM, 7 BM, 7 Cris] {1.0714285714285714}

2. Syg : R(301)=	1.728127933874852E-7	k=[58, 37, 30, 51, 58, 37, 30]
4. Syg : R(665)=	3.5724343089575104E-7	k=[128, 82, 66, 113, 128, 82, 66]
5. Syg : R(72)=	2.1645410332343482E-5	k=[14, 9, 7, 12, 14, 9, 7]
7. Syg : R(79)=	4.624030150863581E-5	k=[15, 10, 8, 13, 15, 10, 8]
8. Syg : R(68)=	7.250943769014641E-5	k=[13, 8, 7, 12, 13, 8, 7]
10. Syg : R(53)=	1.4681455093589735E-4	k=[10, 7, 5, 9, 10, 7, 5]
11. Syg : R(36)=	3.154116891663556E-4	k=[7, 4, 4, 6, 7, 4, 4]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [8/7 - 13/12 - 14/13] : 40 με Εφέβδομο και φυσική διαίρεση

d1 = 8/7 [231 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1428571428571428}

d2 = 13/12 [139 Cents, 6 TM, 8 BM, 8 Cris] {1.0833333333333333}

d3 = 14/13 [128 Cents, 6 TM, 8 BM, 7 Cris] {1.0769230769230769}

2. Syg : R(665)=	1.6818526131262087E-7	k=[128, 77, 71, 113, 128, 77, 71]
3. Syg : R(1200)=	2.417131550221616E-7	k=[231, 139, 128, 204, 231, 139, 128]
4. Syg : R(301)=	1.2788941960592822E-6	k=[58, 35, 32, 51, 58, 35, 32]
5. Syg : R(36)=	5.161994401504388E-5	k=[7, 4, 4, 6, 7, 4, 4]
6. Syg : R(72)=	5.161994401504388E-5	k=[14, 8, 8, 12, 14, 8, 8]
7. Syg : R(68)=	5.174456586049616E-5	k=[13, 8, 7, 12, 13, 8, 7]
9. Syg : R(53)=	6.981028764035583E-5	k=[10, 6, 6, 9, 10, 6, 6]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [8/7 - 88/81 - 189/176] : 50 με Εφέβδομο και ελάχιστο Χρυσάνθου

d1 = 8/7 [231 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1428571428571428}

d2 = 88/81 [143 Cents, 6 TM, 9 BM, 8 Cris] {1.0864197530864197}

d3 = 189/176 [123 Cents, 5 TM, 7 BM, 7 Cris] {1.0738636363636365}

2. Syg : R(301)=	1.8451153661941832E-7	k=[58, 36, 31, 51, 58, 36, 31]
4. Syg : R(665)=	9.619304893311503E-7	k=[128, 80, 68, 113, 128, 80, 68]
5. Syg : R(68)=	3.3133183675234306E-5	k=[13, 8, 7, 12, 13, 8, 7]
7. Syg : R(72)=	7.840768999497401E-5	k=[14, 9, 7, 12, 14, 9, 7]
11. Syg : R(36)=	1.6819274045820336E-4	k=[7, 4, 4, 6, 7, 4, 4]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [8/7 - 10/9 - 21/20] : 60 με Εφέβδομο

d1 = 8/7 [231 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1428571428571428}

d2 = 10/9 [182 Cents, 8 TM, 11 BM, 10 Cris] {1.111111111111112}

d3 = 21/20 [84 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.05}

2. Syg : R(665)=	1.3926255857482573E-7	k=[128, 101, 47, 113, 128, 101, 47]
4. Syg : R(301)=	1.357744040066763E-6	k=[58, 46, 21, 51, 58, 46, 21]
5. Syg : R(72)=	1.2167349151976923E-5	k=[14, 11, 5, 12, 14, 11, 5]
7. Syg : R(53)=	4.8485647068463685E-5	k=[10, 8, 4, 9, 10, 8, 4]
8. Syg : R(79)=	5.996981043936047E-5	k=[15, 12, 6, 13, 15, 12, 6]
9. Syg : R(68)=	6.824494472150626E-5	k=[13, 10, 5, 12, 13, 10, 5]
11. Syg : R(36)=	3.917886426739505E-4	k=[7, 5, 3, 6, 7, 5, 3]
12. Syg : R(12)=	0.0012751488222725144	k=[2, 2, 1, 2, 2, 2, 1]

Κλίμακα της μορφής 4χ-Τ-4χ, με :

4χ = [8/7 - 9/8 - 28/27] : Μέσον Διατονικό του Αρχύτα

d1 = 8/7 [231 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1428571428571428}

d2 = 9/8 [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

d3 = 28/27 [63 Cents, 3 TM, 4 BM, 4 Cris] {1.037037037037037}

2. Syg : R(1200)=	3.77716959631521E-8	k=[231, 204, 63, 204, 231, 204, 63]
3. Syg : R(665)=	6.155238865226668E-8	k=[128, 113, 35, 113, 128, 113, 35]
4. Syg : R(301)=	9.305357301225422E-7	k=[58, 51, 16, 51, 58, 51, 16]
5. Syg : R(36)=	3.326845169316833E-5	k=[7, 6, 2, 6, 7, 6, 2]
6. Syg : R(72)=	3.326845169316833E-5	k=[14, 12, 4, 12, 14, 12, 4]
7. Syg : R(53)=	3.744047657502202E-5	k=[10, 9, 3, 9, 10, 9, 3]
12. Syg : R(12)=	0.0018570994536192388	k=[2, 2, 1, 2, 2, 2, 1]

Σφάλμα στην κατασκευή της κλίμακος: Τα διαστήματα

d1 = 8/7 [231 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1428571428571428}

d2 = 12/11 [151 Cents, 7 TM, 9 BM, 9 Cris] {1.0909090909090908}

d3 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

d4 = 9/8 [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

d5 = 8/7 [231 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1428571428571428}

d6 = 12/11 [151 Cents, 7 TM, 9 BM, 9 Cris] {1.0909090909090908}

d7 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

έχουν άθροισμα 294912/148225 [1191 Cents, 53 TM, 71 BM, 67 Cris] {1.9896238826108956}

που είναι άνισο της αρμονίας (8χ) που ισούται με : 2/1 [1200 Cents, 53 TM, 72 BM, 68 Cris] {2.0}

Διαφορά : -9 Cents

Ατελής κλίμακα, δεν μπορεί να γίνει συγκερασμός!

Κλίμακα της μορφής d1-d2-d3-d4-d5-d6-d7, με : (Η προηγούμενη με αυξημένο διαζευκτικό τόνο κατά 9 cents)

d1 = 8/7 [231 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1428571428571428}

d2 = 12/11 [151 Cents, 7 TM, 9 BM, 9 Cris] {1.0909090909090908}

d3 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

d4 = -/- [213 Cents, 9 TM, 13 BM, 12 Cris] {1.130922447065858}

d5 = 8/7 [231 Cents, 10 TM, 14 BM, 13 Cris] {1.1428571428571428}

d6 = 12/11 [151 Cents, 7 TM, 9 BM, 9 Cris] {1.0909090909090908}

d7 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

4. Syg : R(301)= 1.833918626739873E-6 k=[58, 38, 28, 53, 58, 38, 28]

9. Syg : R(68)= 8.271481051505466E-5 k=[13, 9, 6, 12, 13, 9, 6]

10. Syg : R(53)= 1.0667771281696468E-4 k=[10, 7, 5, 9, 10, 7, 5]

11. Syg : R(36)= 3.853816776045715E-4 k=[7, 5, 3, 6, 7, 5, 3]

12. Syg : R(12)= 0.0029984592597267707 k=[2, 2, 1, 2, 2, 2, 1]

Εξωτερικές κλίμακες

Maqam Karcigar

Κλίμακα της μορφής 4χ1-T-4χ2, με :

4χ1 = [10/9 - 16/15 - 9/8] : ussak (Διδύμου)

d1 = 10/9 [182 Cents, 8 TM, 11 BM, 10 Cris] {1.111111111111112}

d2 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

d3 = 9/8 [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

4χ2 = [15/14 - 7/6 - 16/15] : hijaz (μαλακό χρωματικό 7/6 με φυσική διαίρεση (MX))

d1 = 15/14 [119 Cents, 5 TM, 7 BM, 7 Cris] {1.0714285714285714}

d2 = 7/6 [267 Cents, 12 TM, 16 BM, 15 Cris] {1.1666666666666667}

d3 = 16/15 [112 Cents, 5 TM, 7 BM, 6 Cris] {1.0666666666666667}

2. Syg : R(665)=	8.893573632215273E-8	k=[101, 62, 113, 113, 66, 148, 62]
3. Syg : R(1200)=	2.1144169956145117E-7	k=[182, 112, 204, 204, 119, 267, 112]
4. Syg : R(301)=	7.351339866539237E-7	k=[46, 28, 51, 51, 30, 67, 28]
5. Syg : R(53)=	2.7786556047416212E-5	k=[8, 5, 9, 9, 5, 12, 5]
6. Syg : R(72)=	3.475088052348233E-5	k=[11, 7, 12, 12, 7, 16, 7]
7. Syg : R(64)=	4.2851897879197296E-5	k=[10, 6, 11, 11, 6, 14, 6]
10. Syg : R(68)=	1.0121638546730971E-4	k=[10, 6, 12, 12, 7, 15, 6]
12. Syg : R(12)=	8.967535335075563E-4	k=[2, 1, 2, 2, 1, 3, 1]

Maqam Humayun

Κλίμακα της μορφής 4χ1-T-4χ2, με :

4χ1 = [135/128 - 6/5 - 256/243] : hijaz (σκληρό χρωματικό 6/5 MX & Χρυσάνθου(?)

d1 = 135/128 [92 Cents, 4 TM, 6 BM, 5 Cris] {1.0546875}

d2 = 6/5 [316 Cents, 14 TM, 19 BM, 18 Cris] {1.2}

d3 = 256/243 [90 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.0534979423868314}

4χ2 = [256/243 - 9/8 - 9/8] : kurdi (Πιθαγόρειο δώριο)

d1 = 256/243 [90 Cents, 4 TM, 5 BM, 5 Cris] {1.0534979423868314}

d2 = 9/8 [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

d3 = 9/8 [204 Cents, 9 TM, 12 BM, 12 Cris] {1.125}

2. Syg : R(665)=	1.8750931327127884E-8	k=[51, 175, 50, 113, 50, 113, 113]
3. Syg : R(1200)=	1.2143601141787372E-7	k=[92, 316, 90, 204, 90, 204, 204]
4. Syg : R(53)=	1.9372326200102966E-6	k=[4, 14, 4, 9, 4, 9, 9]
5. Syg : R(301)=	2.3542343566210195E-6	k=[23, 79, 23, 51, 23, 51, 51]
11. Syg : R(12)=	2.297823405100718E-4	k=[1, 3, 1, 2, 1, 2, 2]
12. Syg : R(36)=	2.297823405100718E-4	k=[3, 9, 3, 6, 3, 6, 6]

Επίλογος

Παρατηρήσεις

Στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε αντιστοίχιση διαστημάτων με μη ακέραιο αριθμό κομμάτων, όπως τα γνωστά σε όλους 6.5 και 5.5 και γιατί όχι 3.14, δεν υπάρχει λόγος εύρεσης της καλύτερης προσέγγισης, διότι έτσι μπορούμε να εκφράσουμε οποιοδήποτε διάστημα με όση ακρίβεια θέλουμε.

Αν όμως γινόταν κάτι τέτοιο, γιατί να χρειαστεί να συγκεράσουμε την κλίμακα; Θα μπορούσαμε να εργαστούμε απ' ευθείας με τα διαστήματα και τους λόγους τους.

Για τα ανθρώπινα δεδομένα, είναι δύσκολο, αν όχι ακατόρθωτο, ο άνθρωπος να υπολογίζει τα διαστήματα με τους λόγους τους, δηλαδή να κάνει απ' ευθείας αναφορά στην γεωμετρική πρόοδο των συχνοτήτων της κλίμακος.

Εξίσου δύσκολο επομένως, αν όχι ακατόρθωτο, είναι να αναφερόμαστε στην πράξη, σε χωρισμούς κλιμάκων άνω, έστω, των 72 ή των 79 κομμάτων. Δεν μπορεί να έχει πρακτική εφαρμογή η μετατροπή του Πυθαγορείου τόνου 9/8, σε 113 delfi, ενώ σε 9 Πυθαγόρεια κόμματα, αντιθέτως, έχει.

Είναι λοιπόν απαραίτητο να τονίσουμε ότι, όπως η μετατροπή ενός διαστήματος σε πεπερασμένο πλήθος κομμάτων, γίνεται στον πλησιέστερο ακέραιο, έτσι και ο συγκερασμός μια κλίμακος, δεδομένων διαστημάτων, πραγματοποιείται σε ακέραιο αριθμό κόμματων.

Συμπεράσματα

...

καὶ τῷ Θεῷ δόξα

Βιβλιογραφία

1. Κ. Δ. Αλεξοπούλου, Γενική Φυσική, Τόμος Ι Μηχανική – Ακουστική, Αθήνα 1960
2. Θ. Γ. Κουγιουμζέλη – Σ. Γ. Περιστεράκη, Στοιχεία Φυσικής, Τόμος ΙΙ Κυματική, Αθήνα 1963
3. Δημητράτου, Μείζον Λεξικό όλης της Ελληνικής γλώσσης, Αθήνα 1964
4. Φυσική Γ' Λυκείου, ΟΕΔΒ Έκδοση Δ', Αθήνα 1986
5. Χρήστου Σπυρίδη, Μια εισαγωγή στη φυσική της μουσικής, Θεσσαλονίκη 1986
6. Εκπαιδευτική Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια, τομ. 14-15, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – ΦΥΣΙΚΗ – ΧΗΜΕΙΑ, Εκδοτική Αθηνών 1991
7. Εγκυκλοπαίδεια Πάπυρος – Λαρούς – Μπριτάνικα, Εκδ: Πάπυρος Γραφικαί Τέχναι Α.Ε., 2006
8. Παναγιώτου Δ. Παπαδημητρίου, Συγκερασμός κλιμάκων στο www.byzantine-music.net

Μουσικά

9. Χρυσάνθου Μαδυτινού, Μέγα θωρητικόν της Μουσικής, Τεργέστη 1832, Επανέκδ: Κουλτούρα
10. Στοιχειώδης διδασκαλία της Εκκλησιαστικής Μουσικής εκπονηθείσα επί τη βάση του ψαλτηρίου υπό της μουσικής επιτροπής του Οικουμενικού Πατριαρχείου εν έτει 1883
11. Χαραλάμπους Οικονόμου, Βυζαντινής Μουσικής Χορδή, Πάφος 1940
12. Ιωάννου Μαργαζιώτη, Θεωρητικό Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής, 1958
13. Μιχαήλ Χατζηαθανασίου, Αι βάσεις της Βυζαντινής Μουσικής, Κωνσταντινούπολη 1948
14. Αστερίου Δερβελή, Πηδάλιον – Μέθοδος Βυζαντινής Μουσικής, Θεσσαλονίκη 1989
15. Κυριάκου Καλαϊτζίδη, το ούτι, Τόμος Α', Εκδ: ΕΝ ΧΟΡΔΕΣ, Θεσσαλονίκη 1996
16. Μάριου Μαυροειδή, Οι μουσικοί τρόποι στην Ανατολική Μεσόγειο, Εκδ: Fagotto, Αθήνα 1999
17. M. L. West, Αρχαία Ελληνική Μουσική, Εκδ: Παπαδήμα, Αθήνα 2004
18. Κατερίνας Παπαοικονόμου Κηπουρογού, Η μουσική στην Αρχαία Ελλάδα, Εκδ: Γεωργιάδη, 2007